Magdalena Niculescu

GEOMETRIA TETRAEDRULUI

Editura Tehno-Art

CUPRINS

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI TEORETICE FUNDAMENTALE

Acest capitol conține noțiunile teoretice pregătitoare pentru a parcurge lucrarea elaborată. El a fost introdus pentru a se realiza o prezentare condensată a cunoștințelor fundamentale legate de tetraedru.

1.1. Terminologie și proprietăți

Definiția 1.1. Fie un triunghi ABC și $D \notin (ABC)$, (Fig.1.1). Se numește *tetraedru* reuniunea tuturor segmentelor închise [DP], unde $P \in \Delta ABC \cup \mathrm{Int}\,(\Delta ABC)$.

Observație: Tetraedrul este corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare din spațiu. Denumirea sa provine de la cuvintele grecești: tetra - patru, hedra - față.

Pentru tetraedrul ABCD din fig. 1.1, punctele A, B, C, D se numesc vârfurile tetraedrului. Segmentele închise [DA], [DB], [DC], [AB], [BC], [CA] se numesc *muchiile* tetraedrului, iar suprafețele triunghiulare [ABC], [ABD], [ACD], [BCD] sunt *fețele* tetraedrului.

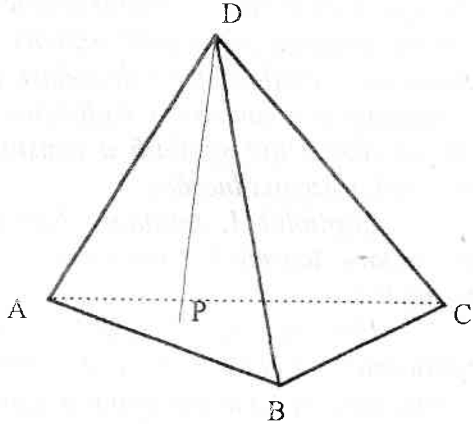

Fig.1.1

Reuniunea fețelor tetraedrului se numește *suprafața* tetraedrului, iar suma ariilor acestor fețe se numește *aria totală* a tetraedrului. Orice punct al segmentului (DP) se numește *punct interior* tetraedrului. Două muchii necoplanare ale unui tetraedru se numesc muchii opuse.

Observații:

1. Aparent, din modul de definire a tetraedrului, nu rezultă că [AB], [BC], [CA] fac parte din tetraedru, dar, întrucât P parcurge și laturile triunghiului ABC, atunci și acestea fac parte din tetraedru.

2. Uneori, prin tetraedru se va înțelege numai suprafața sa, acest lucru rezultând din context.

Definiția 1.2. Se numește *mediană* a unui tetraedru segmentul care unește vârful unui tetraedru cu centrul de greutate al feței opuse.

Observație: Într-un tetraedru există patru mediane.

Definiția 1.3. Se numește *înălțime* a unui tetraedru segmentul ce are ca extremități un vârf al tetraedrului și proiecția acestui vârf pe planul feței opuse. Proiecția unui vârf pe planul feței opuse se numește piciorul înălțimii.

Observații:

1. Uneori, tot înălțime se poate numi și dreapta care conține segmentul numit înălțime (prin analogie cu înălțimea unui triunghi).

2. Dacă se consideră înălțimea ca segment, se poate vorbi de *lungimea înălțimii.*

3. Distanța de la un vârf al tetraedrului la planul feței opuse este lungimea înălțimii corespunzătoare feței respective.

4. Deoarece tetraedrul are patru vârfuri, există patru înălțimi ale tetraedrului.

5. Spre deosebire de înălțimile unui triunghi care sunt concurente indiferent de natura triunghiului, nu orice tetraedru are înălțimile concurente. Astfel, există tetraedre în care înălțimile nu sunt concurente și tetraedre în care acestea sunt concurente.

Definiția 1.4. Se numește *bimediană* a unui tetraedru, segmentul determinat de mijloacele a două muchii opuse.

Observație: Într-un tetraedru există trei bimediane.

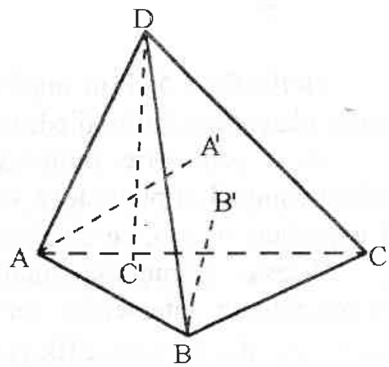

Fig.1.2

Teorema 1.1. Produsul dintre o înălțime a tetraedrului și aria feței care conține piciorul acestei înălțimi este egal cu produsul dintre orice altă înălțime a aceluiași tetraedru și aria feței ce conține piciorul acelei înălțimi (Fig.1.2).

$AA' \cdot S_{BCD} = BB' \cdot S_{ACD} = CC' \cdot S_{ABD} = DD' \cdot S_{ABC}$

unde AA', BB', CC', DD' reprezintă lungimile înălțimilor [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] ale tetraedrului ABCD.

Definiția 1.5. Se numește *volum* al tetraedrului numărul ce reprezintă 1/3 din produsul dintre o înălțime a tetraedrului și aria feței care conține piciorul acelei înălțimi. Pentru tetraedrul din figura 1.2, dacă se notează cu V volumul său, avem:

$$V = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{BCD}, \text{ sau: } V = \frac{1}{3} BB' \cdot S_{ACD} \text{ sau}$$

$$V = \frac{1}{3} CC' \cdot S_{ABD}, \text{ sau: } V = \frac{1}{3} DD' \cdot S_{ABC}$$

Ținând seama de definiția înălțimii, se mai poate scrie:

$$V = \frac{1}{3} d\left(A, (BCD)\right) \cdot S_{BCD} \text{ și analoagele.}$$

Consecință: Distanța de la un vârf al tetraedrului la fața opusă acesteia este egală cu raportul dintre triplul volumului său și aria feței respective, adică:

$$d\left(A, (BCD)\right) = \frac{3V}{S_{BCD}} \text{ și analoagele.}$$

Teorema 1.2. (de aditivitate a volumului). Fie un tetraedru ABCD:
1. Dacă $M \in (BC)$, atunci: $V_{ABCD} = V_{ABMD} + V_{ACMD}$ (Fig.1.3 a);
2. Dacă $M \in Int(\Delta ABC)$, atunci: $V_{ABCD} = V_{BCMD} + V_{CAMD} + V_{BAMD}$ (Fig.1.3 b);
3. Dacă M este un punct din interiorul tetraedrului ABCD, atunci:

$$V_{ABCD} = V_{ABCM} + V_{BCMD} + V_{CDAM} + V_{DABM} \text{ (Fig.1.3 c)}$$

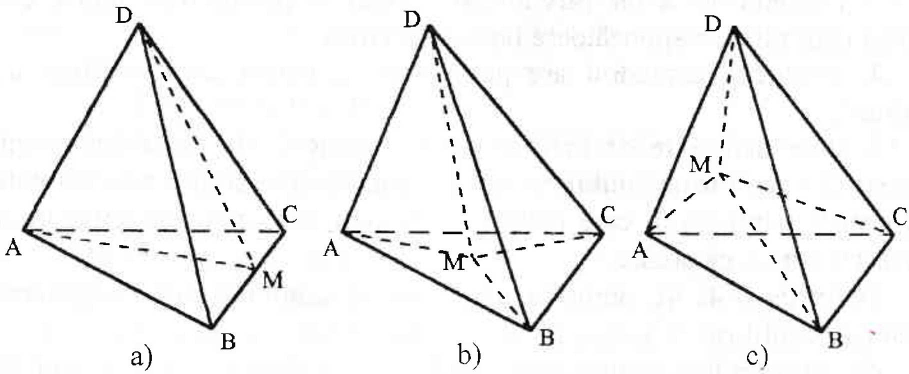

Fig.1.3

Definiția 1.6. Prin *unghiul a două fețe* ale unui tetraedru înțelegem unghiul plan al unghiului diedru care conține aceste fețe.

Se consideră trei semidrepte necoplanare: a=[OA, b=[OB, c=[OC cu originea comună în punctul O. Aceste semidrepte, două câte două, determină trei semiplane α, β, γ, pe care le notăm astfel: $\alpha = (a; b)$, $\beta = (b; c)$, $\gamma = (a; c)$

Aceste semiplane, două câte două, împreună cu semidreapta corespunzătoare intersecției lor, definesc trei unghiuri diedre pe care le notăm: $\angle(\alpha, \beta)$, $\angle(\alpha, \gamma)$, $\angle(\beta, \gamma)$.

Definiția 1.7. Mulțimea formată din semidreptele a, b, c, împreună cu semiplanele α, β, γ se notează cu $\angle(a, b, c)$ sau $\angle O(ABC)$ și se numește *unghi triedru* (Fig.1.4).

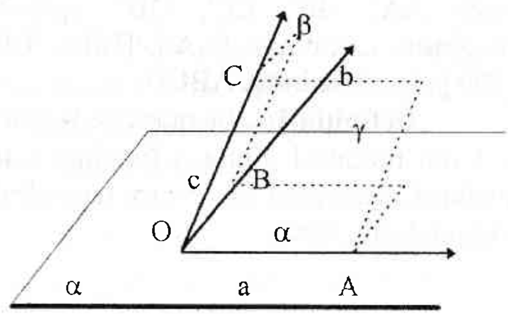

Fig.1.4

Observație: Punctul O se numește *vârful triedrului*. Semidreptele a, b, c, se numesc *muchiile triedrului*. Unghiurile $\angle(a, b)$, $\angle(a, c)$, $\angle(b, c)$ se numesc unghiurile triedrului, iar $\angle(\alpha, \beta)$, $\angle(\alpha, \gamma)$, $\angle(\gamma, \beta)$ se numesc *diedrele triedrului*.

Definiția 1.8. Se numește *secțiune* într-un tetraedru intersecția dintre un plan și un tetraedru.

Considerând un tetraedru confecționat din hârtie (tetraedru-suprafață deci nu tetraedru-corp), prin *desfășurarea* tetraedrului se înțelege poligonul plan care se obține prin "rabaterea" fețelor sale în jurul muchiilor unei fețe, până când toate fețele devin coplanare (Fig.1.5).

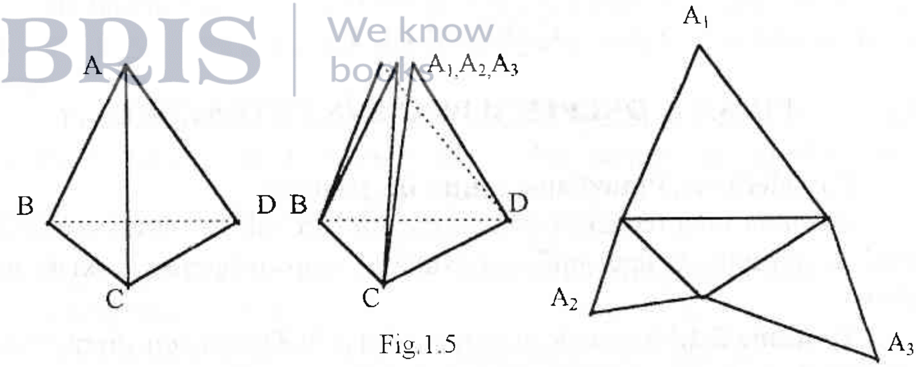

Fig.1.5

Definiția 1.9. Se numeşte *plan bisector* al diedrului propriu $\angle[(ABC), (BCD)]$, planul α ce conține punctele M cu proprietatea $\angle[(ABC), (BCM)]=\angle[(MBC), (BCD)]$. Semiplanul delimitat de BC în α, alcătuit din punctele interioare diedrului dat, se numeşte *semiplan bisector*. Planul prin BC perpendicular pe α se numeşte *plan bisector exterior.*

1.2. Tetraedre particulare

În funcție de condițiile care se pot pune asupra fețelor tetraedrului sau asupra lungimilor muchiilor, tetraedrele pot fi:

1. Tetraedrul *izofacial* sau piramida triunghiulară regulată, care are o față triunghi echilateral;
2. Tetraedrul *echifacial,* care are toate fețele triunghiuri echivalente (de aceeaşi arie);
3. Tetraedrul *regulat,* care are toate fețele triunghiuri echilaterale;
4. Tetraedru *tridreptunghic*, care are trei dintre fețe triunghiuri dreptunghice cu unghiurile drepte în acelaşi vârf.

Dacă se pun condiții asupra lungimilor muchiilor, există:

1. Tetraedre *echifaciale*, la care muchiile opuse sunt congruente;
2. Tetraedre *regulate,* care au toate muchiile congruente;
3. Tetraedre *izodinamice,* la care produsele muchiilor opuse sunt egale (Fig.1.6): $AD\cdot BC=AC\cdot BD=AB\cdot CD$.
4. Tetraedre *Crelle*, la care sumele muchiilor opuse sunt egale:

$$AD+BC = AC+BD = AB+CD.$$

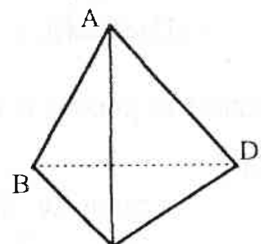

Fig.1.6

5. Tetraedre *ortocentrice* au sumele pătratelor muchiilor opuse egale:

$$AD^2+BC^2 = AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2.$$

Există şi alte criterii de particularizare: după unghiuri diedre, după unghiuri triedre, după distanța între muchiile opuse, după lungimile sau pozițiile reciproce ale unor linii importante în tetraedru.

CAPITOLUL 2

PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE ÎN TETRAEDRU

2.1. Mediane, bimediane, centre de greutate

Mediana unui tetraedru este segmentul care uneşte vârful acestuia cu centrul de greutate al feţei opuse. Rezultă că într-un tetraedru există patru mediane.

Teorema 2.1. Medianele unui tetraedru ABCD sunt concurente întř-un punct numit *centru de greutate.* Acesta se găseşte pe fiecare mediană la 3/4 de vârf şi la 1/4 de bază.

Demonstraţie: Fie $[DG_D]$ şi $[AG_A]$ medianele care pleacă din vârfurile D, respectiv A, iar G punctul lor de intersecţie (Fig.2.1).

Dacă [AM] este mediană în ΔABC şi G_D - centru de greutate în ΔABC, rezultă că: $\frac{MG_D}{MA}=\frac{1}{3}$; analog, $\frac{MG_A}{MD}=\frac{1}{3}$.

Din cele două relaţii se obţine:

$\frac{MG_D}{MA}=\frac{MG_A}{MD} \Rightarrow$ $[G_AG_D]$ paralel cu [DA] (conform reciprocei teoremei lui Thales).

Conform teoremei fundamentale a asemănării, rezultă $\Delta MG_DG_A \sim \Delta MAD$. De aici $\frac{G_DG_A}{AD}=\frac{1}{3}$ sau $G_DG_A=\frac{1}{3}AD$. Cum $DG_D \cap AG_A=\{G\} \Rightarrow \Delta\, GG_DG_A \sim \Delta\, GDA$

$\Rightarrow \frac{G_AG_D}{AD}=\frac{GG_D}{DG}=\frac{GG_A}{AG}=\frac{1}{3}$.

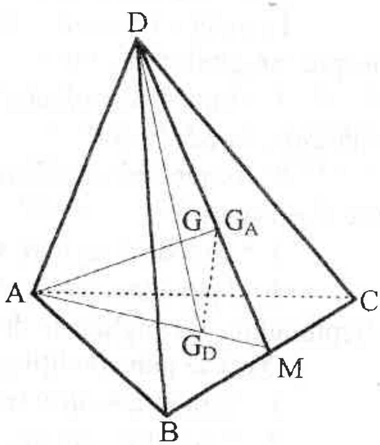

Fig.2.1

Dacă $GG_D=\frac{1}{3}DG$ şi $GG_A=\frac{1}{3}AG$, rezultă că punctul G este situat pe fiecare mediană la $\frac{3}{4}$ din lungimea ei de la vârf.

Analog se demonstrează că medianele din B şi C intersectează mediana din D la $\frac{3}{4}$ din lungimea ei, adică trec tot prin G. Punctul G astfel determinat se numeşte *centru de greutate* al tetraedrului.

Definiţia 2.1. Planul care trece printr-o muchie a unui tetraedru şi prin mijlocul muchiei opuse se numeşte *plan median.*

Teorema 2.2. Cele şase plane mediane ale unui tetraedru sunt concurente.

Demonstrație: Fie (ADM) planul median care trece prin G (Fig.2.1). Cum toate planele mediane ale tetraedrului trec prin G, rezultă că ele sunt concurente.

Teorema 2.3. Fie tetraedrul ABCD (Fig.2.2) și punctele $M \in (AD)$, $N \in (CD)$, $P \in (BD)$. Planul (MNP) trece prin centrul de greutate G al tetraedrului dacă și numai dacă $\frac{AM}{MD} + \frac{BP}{PD} + \frac{CN}{ND} = 1$.

Demonstrație: Fie K centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) Implicația directă:

Dacă planele (MNP) și (ABC) sunt paralele, atunci:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{PB}{PD} = \frac{NC}{ND} = \frac{GK}{GD} = \frac{1}{3} \text{ și deci } \frac{MA}{MD} + \frac{BP}{PD} + \frac{CN}{ND} = 1.$$

Dacă planele (MNP) și (ABC) se intersectează după o dreaptă d, fie atunci: $\{E\} = d \cap GN$; $\{F\} = d \cap GP$; $\{H\} = d \cap GM$.

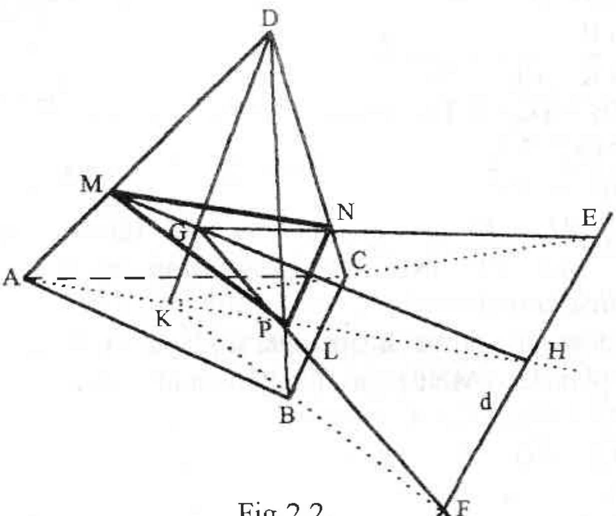

Fig.2.2

Din teorema lui Menelaus în triunghiul DAK (transversala MGH):

$$\frac{MA}{MD} \cdot \frac{GD}{GK} \cdot \frac{HK}{HA} = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{GK}{GD} \cdot \frac{HA}{HK}.$$

În triunghiul DBK (transversala GPF):

$$\frac{PB}{PD} \cdot \frac{GD}{GK} \cdot \frac{FK}{FB} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PD} = \frac{GK}{GD} \cdot \frac{FB}{FK}.$$

În triunghiul DCK (transversala GNE):

$$\frac{NC}{ND} \cdot \frac{GD}{GK} \cdot \frac{EK}{EC} = 1 \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{GK}{GD} \cdot \frac{EC}{EK}.$$

Adunând cele trei egalități membru cu membru, se obține:

$$\frac{MA}{MD} + \frac{PB}{PD} + \frac{NC}{ND} = \frac{GK}{GD} \cdot \left(\frac{HA}{HK} + \frac{FB}{FK} + \frac{EC}{EK} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{HA}{HK} + \frac{FB}{FK} + \frac{EC}{EK} \right).$$